3.5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

3.5.1. Технологические способы и производственные функции

В основе деятельности любого предприятия (фирмы) лежит процесс преобразования некоторых ресурсов (факторов) в конечные результаты. Набор факторов характеризуется вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, компонентами которого являются объемы затраченных ресурсов. Результаты производственной деятельности характеризуются вектором $y = (y_1, y_2, \ldots, y_M)$, компонентами которого могут быть объемы выпуска различной продукции, прибыль, рентабельность и другие характеристики. Компоненты обоих векторов объединяют вместе в один вектор

$$v = (x, y).$$

Он характеризует определенный вариант деятельности предприятия, называемый **"технологическим способом"** (ТС). Таких технологических способов в деятельности предприятия может быть много, они характеризуются разными расходами ресурсов, выпуском различного ассортимента продукции и т.п. Совокупность различных технологических способов образует **"технологическое множество" *V***.

Отдельные технологические способы могут быть неравноценны. Можно выделить более выгодные технологические способы, при которых либо удается добиться повышения выпуска продукции при таких же затратах, что и в менее выгодном технологическом способе, либо произвести такое же количество продукции, израсходовав меньшее количество ресурсов.

Рассмотрим два технологических способа: $\boldsymbol{v1}$ и $\boldsymbol{v2}$. Говорят, что технологический способ $\boldsymbol{v1}$ ***предпочтительнее***, технологического способа $\boldsymbol{v2}$, если

$$\begin{matrix} 1)\ y1_i \geq y2_i, \quad i = 1, \ldots, M \\ 2)\ x1_j \leq x2_j, \quad j = 1, \ldots, N \end{matrix}; \qquad (3.65)$$

и при этом справедливо, по крайней мере, одно из условий

1) существует хотя бы один номер $\boldsymbol{i_0}$, при котором

$$y1_{i_0} > y2_{i_0};$$

2) существует хотя бы один номер $\boldsymbol{j_0}$, при котором

$$x1_{j_0} < x2_{j_0}.$$

Следует заметить, что если рассмотреть два технологических способа, для которых нарушается одно из условий (3.65), то говорить о предпочтительности одного другому вообще невозможно. Такие технологические способы несопоставимы.

Если некий технологический способ $\tilde{v}$ принадлежит технологическому множеству и не существует другого технологического способа, который также принадлежал бы этому множеству и был бы предпочтительнее $\tilde{v}$, то технологический способ $\tilde{v}$ называется **эффективным**. Поскольку в различных подмножествах технологического множества $\boldsymbol{V}$, состоящих из сопоставимых между собой технологических способов, имеются свои эффективные технологические способы, то внутри $\boldsymbol{V}$ возникает подмножество $\boldsymbol{V^*}$, состоящее из эффективных технологических способов. Оно называется **эффективным подмножеством** $\boldsymbol{V}$.

Отображение вектора $\boldsymbol{x}$ на вектор $\boldsymbol{y}$: $x \to y$ – задается производственной функцией $y = f(x)$. Такое определение производственной функции шире, чем данное в 1-й главе 3-й части, поскольку теперь производственная функция оказывается векторной, а значения ее компонентов могут выражать не только объем выпуска продукции, но и другие результаты хозяйственной деятельности. Тем не менее, в дальнейших рассуждениях мы ограничимся случаем, когда:

1) Производственная функция однозначна – каждому вектору $\boldsymbol{x}$ соответствует только один результат $\boldsymbol{y}$ (это, вообще говоря, не обязательно)

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \qquad (3.66)$$

2) Производственная функция скалярная – результат деятельности описывается одним численным показателем $\boldsymbol{y}$. Обычно в таких случаях $\boldsymbol{y}$ – это денежный эквивалент полного объема произведенной продукции во всем ее ассортименте.

Если производственная функция при каждом векторе аргументов $\boldsymbol{x}$ соответствует эффективному технологическому способу, то уравнение (3.66) задает в $\boldsymbol{N}$-мерном пространстве факторов некую гиперповерхность, которая является границей технологического множества $\boldsymbol{V}$.

Такие производственные функции для конкретных предприятий строятся на основе статистического анализа производственных процессов (при этом неявно предполагается, что эти процессы являются эффективными). Наиболее часто для моделирования используются следующие формы производственных функций:

1) линейная:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ \dots + \ a_N x_N; \tag{3.67}$$

2) степенная:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_N^{a_N}. \tag{3.68}$$

Частным случаем степенной производственной функции (3.68) для двухфакторного технологического процесса является производственная функция Кобба-Дугласа (3.3). В таком частном случае двумя факторами могут оказаться труд $\boldsymbol{L}$ и капитал $\boldsymbol{K}$.

Задание производственной функции позволяет ввести некоторые характеристики технологического процесса:

1) Отношение

$$m_j = \frac{y}{x_j} \tag{3.69}$$

называется ресурсоотдачей фактора (ресурса) $\boldsymbol{x_j}$. Ресурсоотдача определяет выпуск продукции в расчете на единицу затрат соответствующего ресурса.

2) Обратная ресурсоотдаче величина

$$d_j = \frac{x_j}{y} \tag{3.70}$$

называется **ресурсоемкостью** единицы продукции (затрата ресурса на единицу выпущенной продукции).

3) Частная производная

$$q_j = \frac{\partial y}{\partial x_j} \tag{3.71}$$

определяет **предельную ресурсоотдачу**, или **предельную продуктивность ресурса** (здесь, как и во многих других задачах экономической математики, слово "предельный" характеризует величины, описываемые с помощью производных, т.е., отнесенные к бесконечно малому изменению аргумента). Она характеризует прирост выпуска продукции в расчете на единицу прироста соответствующего ресурса.

4) Величина

$$E_j = \frac{q_j}{m_j} = \frac{x_j}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{\partial(\ln y)}{\partial(\ln x_j)} \tag{3.72}$$

задает эластичность выпуска продукции по фактору $\boldsymbol{x_j}$. Эластичность определяет процентное значение прироста выпуска в расчете на 1% прироста затрат ресурса $\boldsymbol{x_j}$.

Для линейной производственной функции (3.67)

$$q_j = a_j. \tag{3.73}$$

Для степенной производственной функции (3.68)

$$E_j = a_j. \tag{3.74}$$

Если значение эластичности находится в диапазоне между 0 и 1 (как в случае производственной функции Кобба-Дугласа), то с увеличением затрат ресурса $\boldsymbol{x_j}$ прирост выпуска на каждую дополнительную единицу затраченного ресурса постепенно уменьшается – имеет место убывание предельной продуктивности ресурса.

Каждый технологический способ отображается точкой в многомерном пространстве ресурсов. Координатами точки являются минимальные затраты ресурсов, необходимые для выпуска заданного объема продукции. Тогда каждому значению объема выпуска $\boldsymbol{y}$ (в денежном выражении) соответствует множество точек, описывающих разные эффективные технологические способы, позволяющие добиться данного объема выпуска. В многомерном пространстве эти точки задают определенную гиперповерхность. В простейшем случае двухфакторной производственной функции для каждого объема выпуска точки образуют на координатной плоскости линию – изокванту производственной функции (см. также главу 3.1). Чем дальше от начала координат находится изокванта, тем большему объему выпуска она соответствует (рис. 3.17).

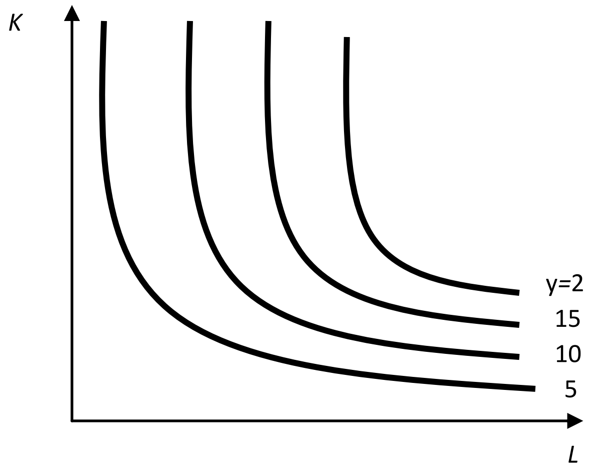

Рис. 3.17. Карта изоквант производственной функции

Анализируя изокванту, можно оценить возможность взаимозамены отдельных ресурсов, не приводящей к изменению объема выпуска.

Допустим, затраты ресурса x_j уменьшились на dx_j. На сколько надо увеличить в этом случае затраты ресурса x_k, чтобы объем выпуска остался неизменным? Ответ на этот вопрос определяется **коэффициентом замены**

$$\gamma_{jk} = -\frac{dx_k}{dx_j}. \qquad (3.75)$$

Знак "минус" возникает из-за того, что изменения значений ресурсов x_j и x_k при смещении точки вдоль изокванты, как можно видеть, например, из рис. 3.17, имеют разные знаки.

Для определения коэффициента замены найдем дифференциал производственной функции при условии, что изменяются только ресурсы $\boldsymbol{x_j}$ и $\boldsymbol{x_k}$, а затраты остальных ресурсов остаются неизменными:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial y}{\partial x_k} dx_k. \tag{3.76}$$

Т.к. значение $\boldsymbol{y}$ должно при замене ресурсов остаться неизменным, дифференциал $\boldsymbol{dy}$ равен нулю. Тогда из (3.76) получается, с учетом определения (3.71)

$$\gamma_{jk} = -\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{\partial y/\partial x_j}{\partial y/\partial x_k} = \frac{q_j}{q_k}. \tag{3.77}$$

Т.о., коэффициент замены ресурса $\boldsymbol{x_j}$ ресурсом $\boldsymbol{x_k}$ равен отношению предельных продуктивностей этих ресурсов.

3.5.2. Оптимизация структуры закупок ресурсов

Допустим, что известны цены на ресурсы x_1, x_2, …, x_N. Обозначим их соответственно p_1, p_2, …, p_N. Также допустим, что для приобретения этих ресурсов выделен определенный объем денежных средств $\boldsymbol{b}$. Эти средства следует израсходовать таким образом, чтобы обеспечить максимально возможный объем выпуска продукции. Структура закупок ресурсов, обеспечивающая такой объем выпуска, определяется из решения задачи оптимизации. Рассмотрим ее постановку.

Любой вариант закупки ресурсов должен удовлетворять условию

$$\sum_{j=1}^{N} p_j x_j \le b. \tag{3.78}$$

Поскольку можно предположить, что для максимального увеличения выпуска продукции, имеющиеся средства будут израсходованы полностью, неравенство можно заменить на равенство

$$\sum_{j=1}^{N} p_j x_j = b. \tag{3.79}$$

Это равенство определяет гиперплоскость в пространстве факторов, называемую **изокостой** (от английского слова "cost" – стоимость).

Тогда оптимальная структура закупок ресурсов определяется из решения задачи условной оптимизации

$$\begin{cases} y = f(x_1, x_{2,} \dots, x_N) \to max, \\ \sum_{j=1}^{N} p_j x_j = b\,. \end{cases} \tag{3.80}$$

Можно отметить значительное сходство задач оптимизации структуры закупок ресурсов (3.80) и оптимизации потребительского выбора (см. § 3.4.3). Оно вытекает из сходства экономических ситуаций, в которых оказываются потребитель и предприятие. Потребитель стремится добиться максимальной полезности для себя, покупая различные блага, и варьируя объемы закупок благ. Для предприятия "полезность" определяется выпуском продукции, приносящим прибыль. Чтобы максимизировать прибыль, надо варьировать объемы закупок ресурсов, обеспечивающих выпуск продукции.

Сходными оказываются и методы решения задач. Условную оптимизационную задачу (3.80) можно заменить эквивалентной задачей поиска безусловного максимума функции Лагранжа

$$L(x_1, x_{2,} \dots, x_N) = y - \lambda \sum_{j=1}^{N} p_j x_j. \tag{3.81}$$

Решение задачи (2.81) определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_j} = \lambda p_j \quad (j = 1,2, \dots, N), \\ \sum_{j=1}^{N} p_j x_j = b. \end{cases} \tag{3.82}$$

Множитель Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$ характеризует в данной задаче предельную продуктивность финансовых средств – прирост выпуска продукции в расчете на единицу увеличения вложенных в дело финансов.

Для двухфакторной задачи решение можно определить графически (рис. 3.18). Оптимальная структура закупки ресурсов $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ соответствует точке $\boldsymbol{D}$, в которой прямая линия изокосты является касательной к графику изокванты производственной функции (значение объема выпуска, соответствующее этой изокванте, является максимально достижимым при заданном объеме финансовых средств ***b***).

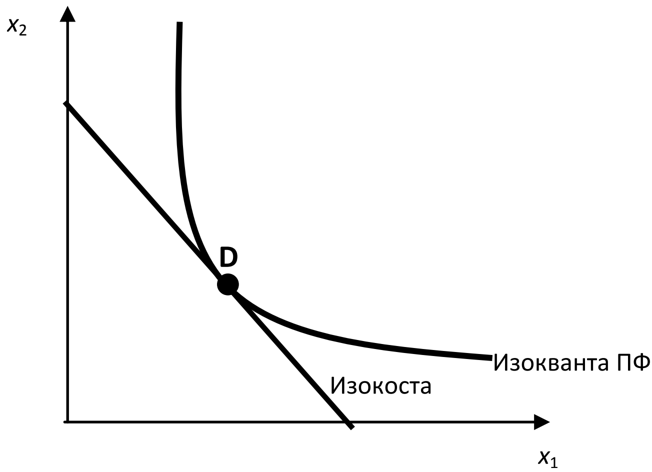

Рис. 3.18. Графическое решение задачи оптимизации закупок

Рассмотрим аналитическое решение задачи оптимизации структуры закупки ресурсов для случая закупки двух ресурсов, которыми являются труд и капитал, а технологический способ описывается с помощью производственной функции Кобба-Дугласа $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$.

Параметрами задачи являются цены на капитал (норма банковского процента по кредитам ***r***) и труд (ставка оплаты труда ***w***).

Тогда система уравнений (3.82) запишется так:

$$\begin{cases} A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = \lambda r, \\ A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} = \lambda w, \\ rK + wL = b, \end{cases} \quad (3.83)$$

или

$$\begin{cases} \alpha \frac{y}{K} = \lambda r, \\ \beta \frac{y}{L} = \lambda w, \\ rK + wL = b. \end{cases} \tag{3.84}$$

Разделив первое уравнение на второе, исключим неизвестную $\boldsymbol{\lambda}$

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{L}{K} = \frac{r}{w}.$$

Выразим $\boldsymbol{K}$ через $\boldsymbol{L}$:

$$K = \frac{\alpha w}{\beta r} L.$$

Подставим это выражение в третье уравнение

$$\frac{\alpha w}{\beta} L + wL = b.$$

Отсюда

$$L = \frac{\beta b}{(\alpha + \beta) w},$$

$$K = \frac{\alpha w}{\beta r} L = \frac{\alpha b}{(\alpha+\beta) r}, \tag{3.85}$$

$$y = AK^{\alpha} L^{\beta} = A \frac{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta} b^{\alpha+\beta}}{r^{\alpha} w^{\beta} (\alpha + \beta)^{(\alpha+\beta)}}.$$

Предельная продуктивность финансовых средств $\boldsymbol{\lambda}$ можно найти из первого или второго уравнения системы (3.84)

$$\lambda = \frac{\alpha y}{rK} = \frac{\alpha y}{r} \cdot \frac{(\alpha+\beta) r}{\alpha \beta} = \frac{(\alpha+\beta) y}{b}. \tag{3.86}$$

Для производственной функции Кобба-Дугласа часто $\alpha + \beta = 1$. При этом решение упрощается:

$$K = \alpha \frac{b}{r}, \quad L = \beta \frac{b}{w}, \quad y = A \frac{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta}}{r^{\alpha} w^{\beta}} b, \quad \lambda = \frac{y}{b}. \tag{3.87}$$

В этом случае увеличение финансовых вложений $\boldsymbol{b}$ дает постоянную отдачу – на каждую дополнительно вложенную единицу средств Δb получается один и тот же прирост выпуска продукции, равный $\lambda\Delta b$.

Если $\alpha + \beta > 1$, отдача возрастает – на каждую дополнительно вложенную единицу финансов получается все больший прирост выпуска. При $\alpha + \beta < 1$ отдача падает по мере увеличения вложений.

3.5.3. Математическое описание рынка. Функции предложения

Рассмотрим другую сторону производственной деятельности. Чтобы получить прибыль, предприятие должно реализовать произведенную продукцию по достаточно высокой цене. Для описания рыночной ситуации вводится **функция предложения *S*(*p*)**. Она описывает зависимость между рыночной ценой товара (произведенного предприятием продукта) ***p*** и его предложением на рынке ***S***. Эта функция зависит от того, как взаимодействуют между собой производители одного и того же товара. Здесь возможны различные ситуации, в частности:

1) **Монополия** – весь товар производится одним производителем. В этом случае он может получать прибыль только за счет повышения цены, не меняя объем выпуска, так что $S(p) = Const$. Дополнительным условием возникновения монополии является отсутствие на рынке замещающих товаров.

2) **Олигополия** – товар производится небольшим числом производителей (в частном случае **дуополии** – двумя). В этом случае на зависимость между ценой и предложением могут влиять различные дополнительные факторы, например, возможность согласованного (прямой сговор) или независимого целенаправленного изменения цены с целью недопущения на рынок новых производителей.

3) **Совершенная** (идеальная) **конкуренция** – товар производится большим числом отдельных производителей, каждый из которых контролирует малую долю рынка, так что сговор между ними практически невозможен. Тогда при повышении цены каждый производитель будет стремиться повысить свою прибыль, увеличивая выпуск товара. Предложение товара в це-

лом возрастет, так что в случае совершенной конкуренции $S'_p > 0$.

В практике экономико-математического моделирования используют в основном два вида функций предложения, получаемых при статистическом обследовании рынка:

1) линейная

$$S(p) = b_0 + b_1 p \ , \quad b_0, b_1 > 0; \tag{3.88}$$

2) степенная

$$S(p) = b_0 p^{\beta} \ , \qquad b_0, \beta > 0. \tag{3.89}$$

Как и в других случаях, важной характеристикой товара оказывается эластичность предложения по цене, показывающая процентный прирост предложения при увеличении цены на 1%

$$E_p(S) = \frac{p}{S}\frac{dS}{dp} = \frac{d\ln S}{d\ln p}. \tag{3.90}$$

Для линейной функции (3.88) $E_p(S) = b_p\,\bar{p}/\bar{S}$, где $\bar{p}, \bar{S}$ – средние значения цены и предложения в обследованном диапазоне (секторе рынка). Для степенной функции предложения $E_p(S) = \beta$.

4) В общем случае объем предложения товара может зависеть не только от его цены, но и от цен на другие товары. Тогда рассматривают систему функций предложения $S_j = S_j(p_1, p_2, \dots p_n)$, где $\boldsymbol{n}$ – количество наименований товаров, и коэффициенты перекрестной эластичности $E_{p_i}(S_j)$. Если перекрестная эластичность отрицательна, то при возрастании цены на $\boldsymbol{i}$-товар выпуск $\boldsymbol{j}$-товара падает. Такие товары называются **конкурирующими**. Если же перекрестная эластичность положительна, то рост цены на $\boldsymbol{i}$-товар стимулирует увеличение выпуска $\boldsymbol{j}$-товара. Такие товары называются **комплектными**.

Возникает противоречие. С точки зрения потребителя, конкурирующие товары являются взаимозамещающими, комплектные – взаимодополняющими (см. § 3.4.1). Но из анализа моделей потребительского спроса мы знаем, что для нормальных товаров рост цены на один из взаимозамещающих товаров увеличивает спрос на другой товар, так что логично было бы ожидать увеличения его выпуска для удовлетворения спроса.

Это противоречие снимается при анализе рыночного равновесия с учетом интересов, как потребителей, так и производителей. Такой анализ будет произведен позже.

3.5.4. Оптимизация структуры выпуска продукции в случае совершенной конкуренции

Продолжим односторонний анализ ситуации – с точки зрения производителя. Он стремится максимизировать получаемую прибыль, действуя в условиях сложившейся системы цен. Цены на производимые товары в этом случае часто рассматриваются, как **экзогенные** (внешние) параметры, величины которых не зависят от действий производителя.

Начнем с простейшего случая, когда предприятие производит один продукт в условиях совершенной конкуренции, в объеме $\boldsymbol{y}$ натуральных единиц. Цена продукта – $\boldsymbol{p}$. Тогда валовой доход производителя будет равен

$$R(y) = py. \qquad (3.91)$$

В ходе производства продукта производитель несет издержки в объеме $\boldsymbol{C(y)}$. Вполне очевидно, что издержки описываются возрастающей функцией $\boldsymbol{y}$, т.е., их величина растет при увеличении объема производства. Менее очевидным, но часто предполагаемым свойством функции $\boldsymbol{C(y)}$ является то, что при увеличении $\boldsymbol{y}$ растет и скорость роста издержек. Иными словами, чем больше объем выпуска, тем большее увеличение издержек происходит при возрастании выпуска на одну и ту же величину. Причина этого может заключаться, например, в том, что для выпуска малого объема продукции производитель может использовать только наиболее совершенное оборудование и задействовать только наиболее квалифицированных рабочих. Если же объем выпуска возрастает, приходится привлекать менее квалифицированную рабочую силу (в результате чего возрастает процент брака) и задействовать резервное, более старое и менее надежное, оборудование, что приводит к росту непроизводительных простоев.

Указанные свойства функции издержек описываются математическими соотношениями

$$C'_y > 0\,, \qquad C''_{yy} > 0. \tag{3.92}$$

По своей природе издержки делятся на:

1) материальные (сырье) $\boldsymbol{C}_{\mathbf{M}}$;

2) оплату труда $\boldsymbol{C}_{\mathbf{L}}$;

3) издержки, связанные с амортизацией, ремонтом оборудования и т.п. – это так называемая "оплата услуг капитала" $\boldsymbol{C}_{\mathbf{K}}$;

4) дополнительные расходы различной природы, в основном связанные с расширением производства для выпуска дополнительной продукции – $\boldsymbol{C}_{\mathbf{R}}$.

Общая величина издержек состоит из трех частей:

1) постоянные расходы $\boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}$, не зависящие от объема выпуска: аренда административных помещений, оплата труда административно-управленческого персонала, амортизационные отчисления и др.;

2) линейные издержки $C_1 = ay$ (материальные затраты, оплата труда производственного персонала – рабочих, обслуживание оборудования, задействованного в выпуске продукции);

3) нелинейные издержки (нелинейными обычно являются всевозможные прочие расходы $\boldsymbol{C}_{\mathbf{R}}$); они описываются степенной функцией $C_2 = by^h$, где показатель степени $h > 1$.

Тогда полные издержки:

$$C(y) = C_0 + ay + by^h. \tag{3.93}$$

Легко видеть, что такая функция удовлетворяет условиям (3.92).

Стратегия действий производителя может зависеть от различных обстоятельств, влияющих на структуру издержек. Рассмотрим в качестве примеров два случая.

1. Предприятие располагает большими производственными мощностями, заведомо перекрывающими его потребности для обеспечения выпуска нужного количества продукции. В

этом случае ему не требуются дополнительные (нелинейные) издержки, так что в выражении (3.93) $C_2(y) = 0$.

Тогда с учетом (3.91), (3.93) прибыль предприятия выражается формулой

$$\Pi(y) = R(y) - C(y) = py - (C_0 + ay) = (p - a)y - C_0. \quad (3.94)$$

Видно, что при малом объеме выпуска $\boldsymbol{y}$ прибыль окажется отрицательна, т.е., предприятие будет нести убытки. Порог безубыточности $\boldsymbol{y_{min}}$ определяется условием $\Pi = 0$. Из (3.94) имеем

$$y_{min} = \frac{C_0}{p-a}. \quad (3.95)$$

Графическая иллюстрация данной ситуации приведена на рис. 3.19. Из рисунка легко понять, что прибыль вообще может появиться в данной ситуации только при условии, что наклон прямой валового дохода ***R*(*y*)** больше, чем наклон прямой издержек ***C*(*y*)**, т.е., $p > a$ (цена продажи продукта выше, чем линейные издержки на единицу продукции).

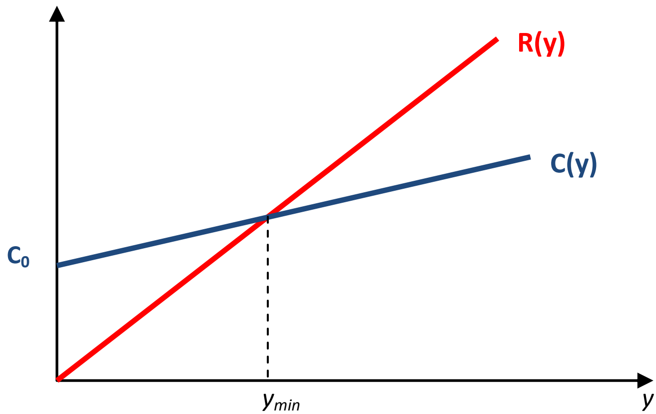

Рис. 3.19. Определение прибыли при линейной функции издержек

2. Фирма имеет возможность расширять производство. В этом случае надо учитывать также и нелинейные издержки $C_2 \neq 0$. Издержки выражаются формулой (3.93), а прибыль:

$$\Pi = R - C = py - \left(C_0 + ay + by^h\right). \qquad (3.96)$$

Рассмотрим графики функций дохода и издержек (рис. 3.20).

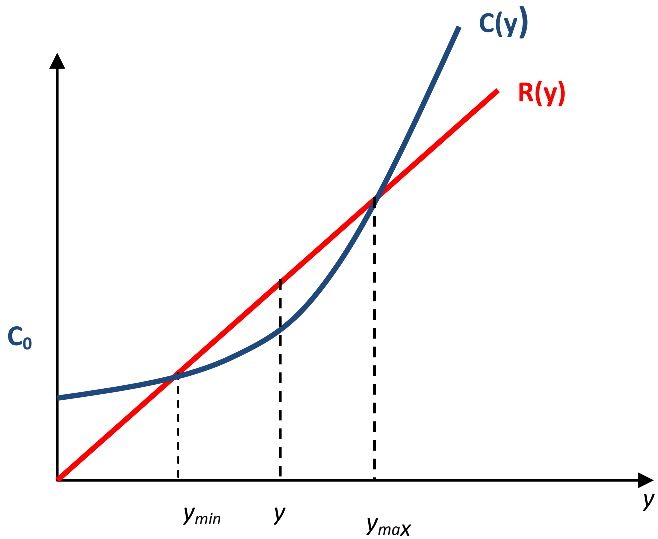

Рис. 3.20. Определение прибыли при нелинейной функции издержек

Из рис. 3.20 видно, что доход превышает издержки, т.е., производство приносит прибыль, при $y_{\min} < y < y_{\max}$. Точки безубыточности y_{min}, y_{max} определяются путем решения уравнения $\Pi = 0$, или, с учетом (3.96)

$$by^h - (p - a)y + C_0 = 0. \qquad (3.97)$$

Также можно видеть, что в некоторой точке отрезка $[y_{min}, y_{max}]$ прибыль, определяемая, как вертикальное расстояние между прямой дохода и кривой издержек, максимальна. Величину выпуска продукции, соответствующую максимальной прибыли, можно найти обычным способом поиска максимума – из решения уравнения $\Pi' = 0$. Дифференцируя (3.96), получаем

$$p - a - bhy^{h-1} = 0,$$

откуда оптимальный объем выпуска

$$y_{\text{М}} = \left(\frac{p-a}{bh}\right)^{\frac{1}{h-1}}. \tag{3.98}$$

Т.к. $\Pi' = R' - C'$, то в точке оптимального выпуска $R' = C'$. Графически это означает, что в этой точке касательная к кривой издержек $\boldsymbol{C(y)}$ параллельна прямой валового дохода $\boldsymbol{R(y)}$. Это позволяет искать оптимальный объем выпуска графически. С экономической точки зрения это означает, что при оптимальном выпуске продукции должны быть равны предельный (в расчете на дополнительную единицу продукции) доход и предельные издержки. В самом деле, если, например, $y < y_{\text{М}}$, то предельный доход превышает предельные издержки. При этом выпуск каждого нового изделия приносит дополнительную прибыль и имеет смысл увеличить выпуск продукции, приближаясь тем самым к точке $\boldsymbol{y_{\text{М}}}$. Аналогично при $y > y_{\text{М}}$ предельные издержки превышают предельный доход и имеет смысл уменьшить выпуск.

Пример 3.10. Фирма производит сельскохозяйственные машины, рыночная цена на которые составляет 500 тысяч рублей за 1 машину. Существующие производственные мощности позволяют выпускать до 150 машин в месяц, при большем объеме выпуска необходимо расширять производство. Расчет возможных издержек показал, что их зависимость от предполагаемого объема выпуска $\boldsymbol{y}$ можно описать функцией

$$C(y) = 2000 + 350y + 5y^{1.5} \text{ (тыс. руб.)}.$$

Решение

Оптимальный объем выпуска в этом случае определяется с помощью формулы (3.98):

$$y_{\text{М}} = \left(\frac{500 - 350}{5 \cdot 1.5}\right)^{\frac{1}{0.5}} = \left(\frac{150}{7.5}\right)^2 = 20^2 = 400 \text{ (штук)}.$$

При этом валовой доход предприятия составит 400·500=200000 тыс. руб., издержки составят

$$C = 2000 + 350 \cdot 400 + 5 \cdot 400^{1.5} = 182\,000 \text{ (тыс. руб.)},$$

прибыль будет равна 200000 – 182000 = 18000 тыс. руб.

Величины оптимального выпуска и прибыли существенно зависят от цены на товар. Если в приведенном примере цена одной машины увеличится на 10% и станет равна 550 тыс. руб., то повторный расчет по тем же формулам даст величину оптимального выпуска 711 машин в месяц и прибыль более 45000 тыс. руб. (т.е., в 2,5 раза – на 2400 % – больше).

3.5.5. Несовершенная конкуренция

В случае несовершенной конкуренции производитель может оказывать влияние на систему цен. В особенности это относится к монопольному производителю, который может формировать цену, исходя из различных собственных соображений, например, из уровня разумной рентабельности.

Допустим, производитель желает, чтобы прибыль при любом объеме выпуска составляла определенную долю $\gamma \in (0,1)$ от валового дохода. Рассмотрим для простоты случай линейной функции издержек

$$C(y) = C_0 + ay. \tag{3.99}$$

Тогда прибыль, с учетом (3.91), (3.99), составит

$$\Pi = py - (C_0 + ay) = \gamma py.$$

Отсюда можно определить необходимую цену товара

$$p = \frac{C_0 + ay}{y(1-\gamma)} = \frac{a}{1-\gamma} + \frac{C_0}{y(1-\gamma)}.$$

Видно, что при увеличении объема производства необходимая величина цены снижается, и производитель может пойти на снижение практически существующей цены, исходя из каких-то дополнительных соображений. Уровень рентабельности останется неизменным.

Если же производитель не снизит цену на производимый товар, то он будет получать дополнительную прибыль.

3.5.6. Оптимизация структуры выпуска продукции в условиях ограниченности ресурсов

Другая простая модель используется, когда необходимо учесть ресурсные ограничения (тот факт, что какие-то ресурсы могут быть доступны производителю только в ограниченном количестве). В этой модели выделяется один, наиболее дефицитный, ресурс, и предполагается, что фирма может получить его в количестве не более $\boldsymbol{Q}$ единиц в месяц, производя при этом $\boldsymbol{n}$ различных продуктов. Объемы выпуска отдельных продуктов – $\boldsymbol{y_j}$, цены на товары – $\boldsymbol{p_j}$ (j=1, 2, …, n). Также известна цена единицы дефицитного ресурса $\boldsymbol{q}$. Расходом прочих ресурсов пренебрегают, считая, что основные издержки связаны с расходованием дефицитного (и, вероятно, дорогого) ресурса.

Будем считать, что функции издержек для каждого товара $\boldsymbol{C_j(y_j)}$ удовлетворяют условиям (3.92). На расход ресурса накладывается ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(y_j) \le qQ.$$

Как и ранее в похожих случаях, полагаем, что для повышения прибыли фирма будет расходовать дефицитный ресурс полностью, так что вместо неравенства запишем равенство

$$C = \sum_{j=1}^{n} C_j(y_j) = qQ. \tag{3.100}$$

Тогда в денежном выражении величина издержек $\boldsymbol{C}$ окажется фиксированной. Поэтому увеличение прибыли

$$\Pi = R - C = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j - qQ \tag{3.101}$$

эквивалентно увеличению валового дохода. В целом на основе (3.100), (3.101) можно сформулировать условную задачу оптимизации

$$\begin{cases} R = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j \to max, \\ \sum_{j=1}^{n} C_j(y_j) = qQ. \end{cases} \quad (3.102)$$

Как и раньше в подобных случаях, ставится эквивалентная задача поиска безусловного максимума функции Лагранжа

$$L = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j(y_j) \to \max. \quad (3.103)$$

Решение задачи определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \lambda (C_j)'_{y_j} = p_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^{n} C_j(y_j) = qQ. \end{cases} \quad (3.104)$$

Видно, что конкретное решение зависит от вида функций издержек для отдельных товаров.

Допустим в качестве примера, что издержки для каждого товара описываются квадратичными функциями

$$C_j = a_j y_j^2.$$

Тогда

$$C'_j = 2a_j y_j$$

и из (3.104) получаем

$$2a_j y_j \lambda = p_j$$

откуда оптимальный выпуск каждого товара определяется выражением

$$y_j = \frac{p_j}{2a_j\lambda}. \quad (3.105)$$

Из последнего уравнения системы (3.104) находим

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{p_j}{2a_j\lambda}\right)^2 = qQ.$$

Отсюда после несложных преобразований находим величину множителя Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{qQ}\sum_{j=1}^{n}\frac{{p_j}^2}{a_j}}. \tag{3.106}$$

Подставив (3.106) в (3.105), получаем для какого-либо товара с индексом $\boldsymbol{k}$ величину выпуска

$$y_k = \sqrt{\frac{qQ}{\sum_{j=1}^{n}\frac{p_o^2}{a_j}}}\frac{p_k}{a_k}. \tag{3.107}$$

Видно, что объем выпуска каждого товара зависит от цен на все товары, выпускаемые предприятием. Если все цены одновременно увеличить одинаковым образом – в $\boldsymbol{M}$ раз, то значения $\boldsymbol{y_i}$ не изменятся – структура ассортимента останется неизменной. Если же меняется только одна из цен, то структура ассортимента изменяется. Из (3.105), (3.107) можно найти

$$\frac{\partial y_k}{\partial p_k} = \frac{1}{2\lambda a_k} > 0, \tag{3.108}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_k} = -\frac{p_i p_k}{a_i a_k}\frac{\sqrt{qQ}}{\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j^2}{a_j}}\right)^3} < 0. \tag{3.109}$$

Видно, что при возрастании цены $\boldsymbol{p_k}$ на какой-либо товар, выпуск этого товара $\boldsymbol{y_k}$ в оптимальном случае должен возрасти, а выпуск любого другого товара $\boldsymbol{y_i}$ должен уменьшиться. Таким образом, в описанной ситуации все товары являются конкурирующими между собой. Также из (3.107) видно, что

$$\frac{\partial y_k}{\partial Q} > 0,$$

так что при увеличении запаса ресурса выпуск каждого товара увеличивается, но для разных товаров степень этого увеличения будет разной.

Пример 3.11. Пусть выпускается два товара по ценам $p_1 = p_2 = 1$. Коэффициенты квадратичных издержек $a_1 = a_2 = 1$. Запас дефицитного ресурса $Q = 0{,}5$, его цена $q = 0{,}5$.

Решение

В этих условиях из (3.106), (3.107) находим

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{0{,}5\cdot 0{,}5}\left(\frac{1^2}{1}+\frac{1^2}{1}\right)} = \sqrt{2} = 1{,}4142,$$

$$y_1 = \frac{1}{2\cdot a_1\cdot\lambda} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 1{,}4142} = 0{,}3536,$$

$$y_2 = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 1{,}4142} = 0{,}3536.$$

Валовой доход $R = p_1y_1 + p_2y_2 = 1\cdot 0{,}3536 + 1\cdot 0{,}3536 = 0{,}7072$.

Издержки равны $C = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 = 1\cdot 0{,}3536^2 + 1\cdot 0{,}3536^2 = 0{,}25$. С другой стороны, их можно также найти по формуле $qQ = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

Прибыль $\Pi = R - C = 0{,}7072 - 0{,}25 = 0{,}4572$.

Пример 3.12. Пусть теперь цена 1-го товара увеличилась и стала равной 1,5. Прочие величины остались такими же, как в примере 3.11.

Аналогично расчетам примера 3.11 находим

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{0{,}5\cdot 0{,}5}\left(\frac{1{,}5^2}{1}+\frac{1^2}{1}\right)} = 1{,}8028,$$

$$y_1 = \frac{1{,}5}{2\cdot a_1\cdot\lambda} = \frac{1{,}5}{2\cdot 1\cdot 1{,}8028} = 0{,}4160,$$

$$y_2 = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 1{,}8028} = 0{,}2774.$$

Валовой доход $R = p_1y_1 + p_2y_2 = 1{,}5\cdot 0{,}4160 + 1\cdot 0{,}2774 = 0{,}9014$.

Издержки равны $C = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 = 1 \cdot 0,4160^2 + 1 \cdot 0,2774^2 = 0,1731 + 0,0769 = 0,25$. Таким образом, они по-прежнему равны величине qQ.

Прибыль $П = R - C = 0,9014 - 0,25 = 0,6514$.

Как видно из сравнения результатов этих двух примеров, выпуск подорожавшего первого товара возрос, тогда, как выпуск второго упал. Прибыль предприятия заметно возросла.